Мат. анализ (4 семестр)
Лектор — Крицков Леонид Владимирович

Гл. 1 Интегралы, зависящие от параметра

§1. Собственные ИЗП

Рассм. $f(x,y)$, определенную на $\Pi = \{(x,y):\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

- if $\forall y \in [c;d]\ \exists \int_a^b f(x,y)\,dx := I(y)$, то $I(y)$ будем называть ИЗП

1°. Функциональные св-ва

- **Th. 1** $f(x,y) \in C(\Pi) \Rightarrow I(y) \in C[c,d]$
- **Th. 2** $f(x,y) \in C(\Pi) \Rightarrow I(y)$ интегр.-ма на $[c,d]$ и $\int_c^d I(y)dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ (1)
- **Th. 3** $\left.\begin{matrix} f(x,y) \in C(\Pi) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(\Pi) \end{matrix}\right\} \Rightarrow I(y)$ дифф.-ма в $y_0 \in [c,d]$ и $I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ (2)

$\rceil$ (Th.1) $\rceil\ y \in [c;d];\ y+\Delta y \in [c;d]$.

$$I(y+\Delta y) - I(y) = \int_a^b f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b [f(x,y+\Delta y) - f(x,y)]\,dx$$

$f \in C(\Pi) \Rightarrow f$ — равном. непр. на Π, и $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |\Delta y| < \delta \Rightarrow |f(x,y+\Delta y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\ \forall x \in [a;b]$

$$\Rightarrow |I(y+\Delta y) - I(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon \Rightarrow I(y) \text{ равн. непр. на } \Pi$$

■

$\rceil$ (Th.2) Th.1 $\Rightarrow I(y) \in C(\Pi) \Rightarrow I(y)$ интегр.-ма на $[c;d]$

$$\int_c^d I(y)dy = \iint_\Pi f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

■

$\rceil$ (Th 3) $\rceil\ g(y) := \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$; по Th.1 $g(y) \in C[c,d]$;

$$\int_c^y g(t)dt = \int_c^y dt \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \overset{\text{Th.2}}{=} \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt = \int_a^b f(x,t)\Big|_{t=c}^{t=y} = I(y) - I(c)$$

$y \in [c,d]$

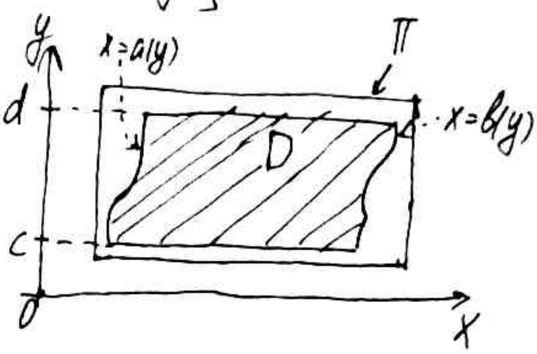
$$\int_c^y g(t)dt = I(y) - I(c) \Rightarrow I(y) \text{ дифф-ма} \Rightarrow I'(y) = g(y)$$

■

2°. Общий собств. интеграл, зав. от пар-ра

$\rceil\, f(x,y)$ определена на $\{(x,y) \mid c \le y \le d,\ a(y) \le x \le b(y)\}$

$\rceil\ \forall y \in [c,d]\ \ \exists\ I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$



Th 4 $\rceil\, f(x,y) \in C(\Pi)$,

Π – прямоуг. т.ч. $D \subset \Pi$; $a(y)$ и $b(y) \in C[c,d]$

$\Rightarrow\ I(y) \in C[c,d]$.

Th.5 $\rceil\, f(x,y) \in C(\Pi)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(\Pi)$; $\rceil\, a(y)$ и $b(y)$ дифф-мы (c,d)

$\Rightarrow\ I(y)$ дифф. на (c,d) и $I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f(b(y),y)\,b'(y) - f(a(y),y)\,a'(y)$.

– ф-ла Лейбница

Используем тождество:

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx + \underbrace{\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx}_{=:\varphi(y)} - \int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx \qquad (4)$$

$\rceil$ (Th 4)

$$f \in C(\Pi) \xrightarrow{Th\,1} \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx \in C[c,d]$$

$$\left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right| \underset{f(x,y)\text{ огр.}}{\le} \max_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)| \cdot \left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} 1\,dx \right| = M_0\,|b(y) - b(y_0)| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 \text{ т.ч. } |y - y_0| < \delta \Rightarrow \left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx - \underbrace{\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx}_{=0} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \Rightarrow \int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \text{ непр.}$$

в силу непр. $b(y)$

Аналогично $\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx$ непр. $\Rightarrow I(y) \in C[c,d]$

■

I (Th.5) В тожд.-ве (4) первое слаг. $\frac{d}{dy}\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ в т.ч. при $y=y_0$

Для оставшихся слагаемых найдем произв. в $y=y_0$ по определению:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{1}{y-y_0}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \ \circleddash$$

$f(x,y)$ непр. по $x \Rightarrow \exists\, \xi \in [b(y_0), b(y)]$ т.ч. $\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = f(\xi,y)(b(y)-b(y_0))$

$$\circleddash\ \underbrace{f(\xi,y)}_{\xrightarrow{y\to y_0} f(b(y_0),y_0)} \cdot \underbrace{\frac{b(y)-b(y_0)}{y-y_0}}_{\xrightarrow{y\to y_0} b'(y_0)} = f(b(y_0),y_0)\,b'(y_0)$$

(т.к. $b(y)$ непр., $b(y)\xrightarrow{y\to y_0} b(y_0)$ и $f(x,y)$ — непр.)

аналогично $\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx = f(a(y),y)\,a'(y) \Rightarrow$ ■

■

P.S. Th.4 и Th.5 верны и при условии непрерывности $f(x,y)$ только в D

§2. Несобственные ИЗП

Рассмотрим $f(x,y)$, опред. на $[a \le x < \infty) \times [c \le y \le d]$

$\rceil \forall y \in [c,d] \quad \exists \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx := I(y)$

Ex.1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{x}\,dx = I(y)$; 1) $\frac{\sin(xy)}{x} = f(x,y) \in C\Big([0 \le x \le \infty) \times [c \le y \le d]\Big)$

2) $I(y)$ сходится при $y \ne 0$ по пр. Дирихле-Абеля

$\left(-\frac{1}{y}\cos(xy)\right)' = \sin(xy)$; $-\frac{1}{y}\cos(xy)$ - огр.; $\frac{1}{x} \searrow 0$

при $y = 0$ $\quad I(y) \equiv 0 \quad$ - сх.

3) при $y > 0$: замена $x \to xy := t$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\left(\frac{t}{y}\right)} \frac{dt}{y} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

при $y < 0$: замена $x \to xy := t$

$$I(y) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin t}{\left(\frac{t}{y}\right)} \frac{dt}{y} = -\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin t}{t}\,dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Получаем: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0 \frac{d(1-\cos t)}{t} = \underbrace{\frac{1-\cos t}{t}\Big|_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos t)}{t^2}\,dt}_{\text{сх.}} = \underbrace{C_0 > 0}_{\text{const}}$

$I(y) = C_0 \operatorname{sgn}(y)$

Ex.2 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t}\,dt = I(\alpha)$; $\alpha > 0$ $\qquad I'_\alpha = \int_0^{+\infty} (-t) e^{-\alpha t} \frac{\sin t}{t}\,dt$

- считается через элем. ф-ции

$I'(\alpha)$ известна $\Rightarrow$ изв. $I(\alpha)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

1°. Понятие равном. сх. несобственных интегралов

- $I(y) := \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ наз. <u>равномерно сход.</u> на $Y \subset [c,d]$

if $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \geq a$ т.ч. $\forall R > A,\ \forall y \in Y: \left|\int_R^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$

▶ <u>Th. 6</u> (критерий Коши)

$I(y)$ равном. сх. на $Y \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists A \geq a: \forall R_1, R_2 > A,\ \forall y \in Y: \left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$

▶ <u>Th. 7</u> (признак Вейерштрасса)

$\exists\, g(x): |f(x,y)| \leq g(x)\ \forall y \in Y, \forall x \geq a;$ $\exists \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится.

$\Rightarrow I(y)$ сх. равномерно на Y

$\exists$ $\left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,dx\right| \leq \int_{R_1}^{R_2} |f(x,y)|\,dx \leq \int_{R_1}^{R_2} g(x)\,dx < \varepsilon \qquad \forall y \in Y$

сход. следует из сх-ти $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ по крит. Коши

■

▶ <u>Th. 8</u> (признак Дирихле - Абеля)

$\exists$. $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,g(x,y)\,dx \quad \forall y \in Y$

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^t f(x,y)\,dx \text{ огр.},\ t \geq a,\ y \in Y \\ g(x,y) \text{ убыв.},\ a \leq x < +\infty,\ \forall y \in Y \\ g(x,y) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \text{ равномерно},\ y \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow I(y) \text{ сх.-ся равномерно на } Y$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ т.ч. $\forall x > \delta, \forall y \in Y \Rightarrow |g(x,y)| < \varepsilon$

равном.

$\exists$ $\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{II Th. о среднем} \\ \text{ф-ла Бонне}}}{\overset{\exists \xi \in (R_1, R_2)}{=\!=\!=}} g(R_1, y)\int_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(R_2, y)\int_{\xi}^{R_2} f(x,y)\,dx$

$\left|\int_{R_1}^{R_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right| \leq |g(R_1,y)|\underbrace{\left|\int_{R_1}^{\xi} f(x,y)\,dx\right|}_{\leq M} + |g(R_2,y)|\underbrace{\left|\int_{\xi}^{R_2} f(x,y)\,dx\right|}_{\leq M};$ $\exists R$ т.ч. $\forall R_1, R_2 > R$ $|g(R_1,y)| < \frac{\varepsilon}{2M};\ |g(R_2,y)| < \frac{\varepsilon}{2M}\ \forall y \in Y$

Ex. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin(yx)}{x}dx$; $\quad \left|\int \sin(yx)\,dx\right| = \left|-\frac{1}{y}\cos(yx)\right| \le \frac{1}{c}$

● $y \in [c,d]$, $c>0$ $\qquad g(x,y)=\frac{1}{x} \searrow 0,\ x\to+\infty$

III условие не надо проверять т.к. не зав. от y

Значит, интеграл сходится равномерно на $[c,d]$.

НО: если $y \in [-c;c]$, $c>0$, то равном. сх-ти нет

▸ Th. 9 (признак Дини равномерной сх-ти)

$\rceil\ I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$, $\quad y \in [c,d]$ - компакт

● Если:

1) $f(x,y) \in C\big([x\ge a]\times[c\le y\le d]\big)$

2) $f(x,y) \ge 0$ на $[x\ge a]\times[c\le y \le d]$

3) $I(y) \in C[c,d]$

то $I(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$

[$\rceil\ I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$

● $\left.\begin{aligned} &I_n(y) \in C([c,d]) \\ &I_{n+1}(y) \ge I_n(y)\ \forall y \in [c,d] \text{ т.к. } f(x,y)\ge 0 \\ &I_n(y) \to I(y) \in C([c,d]) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{I_n(y)\} \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d] \Rightarrow$ по пр. Дини для функц. посл.-й

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ т.ч. $\forall n \ge N: |I_n(y)-I(y)|<\varepsilon \quad \forall y \in [c,d]$

$|I_n(y)-I(y)| = \left|\int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$; $\quad 0 \le \int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx < \varepsilon$

$R \ge a+n \Rightarrow \quad 0 \le \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)\,dx \le \int\limits_{a+n}^{+\infty} f(x,y)\,dx < \varepsilon \quad \forall y \in [c,d]$

● По опр. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сход. равномерно на $[c,d] \Rightarrow$ ■

■

P.S. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сх. равном. на $Y \Rightarrow \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx = I_n(y) \rightrightarrows$ на Y

2° Функциональные св-ва несобств. ИЗП

Th. 10 $f(x,y) \in C([x \geq a] \times [c \leq y \leq d])$
$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ сход. равномерно на $[c;d]$ $\Big\} \Rightarrow I(y) \in C([c;d])$

Д. Рассм. $I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$ — непр.

$\{I_n(y)\} \rightrightarrows I(y)$ на $[c,d] \Rightarrow I(y) \in C([c,d])$

■

P.S. Th. 10 $\Rightarrow \lim\limits_{y \to y_0} I(y) = I(y_0) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)\,dx$

$(y_0 \in [c,d])$

Th. 11

if 1) $f(x,y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \in C([x \geq a] \times [c \leq y \leq d])$

2) $I(y)$ сх. в $y_0 \in [c,d]$

3) $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ сх.-ся равномерно на $[c,d]$

$\Rightarrow I(y)$ дифф.-ма в $\forall y \in (c,d)$ и $I'(y) = \int\limits_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$

Д. $\cdot\ I_n(y) = \int\limits_a^{a+n} f(x,y)\,dx$ — непр., дифф. в $\forall y \in (c,d)$
$I_n'(y) = \int\limits_a^{a+n} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$; $\exists \lim\limits_{n \to \infty} I_n(y)$ хотя бы в одном $y_0 \in [c,d]$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{I_n'(y)\} \rightrightarrows$ на $[c,d]$.

Утв. Th. 11 следует из Th. о дифф.-ти предела функц. посл.-ти

■

Th. 12

$\exists$ выполнены усл. Th 10 $\Rightarrow \begin{cases} I(y) \text{ интегр. на } [c;d] \\ \int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \quad (*) \end{cases}$

$\square$ 1) интегр.-ть очевидна

2) Докажем, что $\int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \to \int\limits_c^d I(y)dy$

Докажем, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_0 \geq a \text{ т.ч. } \forall R > R_0 \ \left| \int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^R \int\limits_c^d f(x,y)dy\,dx \right| < \varepsilon$$

$$\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^R f(x,y)dx + \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_c^d \int\limits_a^R f(x,y)dx\,dy + \int\limits_c^d \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\,dy$$

$$\left| \int\limits_c^d I(y)dy - \int\limits_a^R \int\limits_c^d f(x,y)dy\,dx \right| = \left| \int\limits_c^d \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\,dy \right|$$

В силу равном. сх.-ти:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_0 > a \text{ т.ч. } \forall R > R_0, \forall y \in [c,d]: \left| \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \Rightarrow \blacksquare$$

$\blacksquare$

Th. 13

$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \in C([x \geq a] \times [c \leq y \leq d]) \\ f(x,y) \geq 0 \text{ на } [x \geq a] \times [c \leq y \leq d] \\ I(y) \in C([c;d]) \end{array}\right\} \Rightarrow (*)$

$\square$ $I(y) \rightrightarrows$ на $[c;d]$ по признаку Дини (Th. 9) $\overset{Th.12}{\Rightarrow} \blacksquare$

$\blacksquare$

Th. 14 $\quad \exists f(x,y) \geq 0$ и непр. на $[x \geq a] \times [y \geq c]$. $\exists$ на $[y \geq c]$ и $[x \geq a]$:

$\exists\ I(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$ и $\exists\ K(x) = \int\limits_c^{\infty} f(x,y)dy$, причем $I(y) \in C([y \geq c])$
$K(x) \in C([x \geq a])$

T: из сх-ти одного из повт. интегралов $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$ и $\int\limits_a^{+\infty} K(x)dx$ следует сх-ть другого и их рав-во между собой.

Д 1) $\exists$ сх-ся $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$

Докажем, что $\int\limits_a^{+\infty} K(x)\,dx$ сх.-ся и равен ему $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 \geq a$ т.ч. $\forall R > R_0 : \left| \int\limits_a^R K(x)dx - \int\limits_c^{+\infty} I(y)dy \right| < \varepsilon$

2) $\int\limits_a^R K(x)\,dx = \int\limits_a^R \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dydx \overset{Th.13}{=\!=} \int\limits_c^{+\infty}\int\limits_a^R f(x,y)dxdy$

3) $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy - \int\limits_a^R K(x) = \int\limits_c^{+\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dxdy - \int\limits_c^{+\infty}\int\limits_a^R f(x,y)\,dxdy =$

$= \int\limits_c^{+\infty}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dxdy \underset{\forall z > c}{=\!=} \int\limits_c^{z}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\,dy + \int\limits_z^{+\infty}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\,dy$

4) $\int\limits_c^{+\infty} I(y)dy$ сх. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists z_0 > c$ т.ч. $\forall z \geq z_0 : 0 \leq \left|\int\limits_z^{+\infty} I(y)dy\right| < \varepsilon$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow I(y) \geq 0 \Rightarrow \quad 0 \leq \int\limits_z^{+\infty}\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\,dy < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall R \geq a : \quad 0 \leq \int\limits_z^{+\infty}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dxdy < \varepsilon$; далее возьмем $z = z_0$

5) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)\,dx \rightrightarrows$ на $[c, z_0]$ по пр. Дини (Th.9) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 \geq 0\ \forall R > R_0 : \int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx < \frac{\varepsilon}{z_0 - c}$
$\forall y \in [c, z_0]$

$\Rightarrow \int\limits_c^{z}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_c^{z_0}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dx\,dy < \int\limits_c^{z_0} \frac{\varepsilon}{z_0 - c}\,dy = \varepsilon$

6) $\left|\int\limits_a^R K(x)dx - \int\limits_c^{+\infty} I(y)dy\right| \leq \left|\int\limits_c^{z_0}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dxdy\right| + \left|\int\limits_{z_0}^{+\infty}\int\limits_R^{+\infty} f(x,y)dxdy\right| < 2\varepsilon \Rightarrow \blacksquare$

$\blacksquare$

§3. Примеры использования результатов о несобств. ИЗП

1° Вычисление интеграла Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

1) $I(\alpha) := \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx$ — сх-ся $\forall \alpha \geq 0$

2) $\Phi(x,\alpha) := \int e^{-\alpha x} \sin x\,dx =$

$= -e^{-\alpha x}\cos x - \int \alpha e^{-\alpha x} \cos x\,dx = -e^{-\alpha x}\cos x - \alpha\left(e^{-\alpha x}\sin x + \alpha \int \sin x\, e^{-\alpha x} dx\right) =$

$= -e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha \sin x) - \alpha^2 \int e^{-\alpha x} \sin x\,dx$; $\Phi(x,\alpha) = -e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha \sin x) - \alpha^2\,\Phi(x,\alpha)$

$$\Phi(x,\alpha) = -e^{-\alpha x} \cdot \frac{\cos x + \alpha \sin x}{1+\alpha^2}$$

$\left.\begin{matrix} |\alpha \sin x + \cos x| = \sqrt{\alpha^2+1}\,|\sin(x+\varphi)| \leq \sqrt{\alpha^2+1} \\ e^{-\alpha x} \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |\Phi(x,\alpha)| \leq \frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha^2+1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} \leq 1$

3) Докажем, что $I(\alpha) \rightrightarrows$ на $\{\alpha \geq 0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists R_0 > 0$ т.ч. $\forall R \geq R_0,\ \forall \alpha \geq 0: \left|\int_R^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon$

$$\int_R^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_R^{+\infty} \frac{1}{x}\,d\Phi(x,\alpha) = \underbrace{\left.\frac{\Phi(x,\alpha)}{x}\right|_{x=R}^{+\infty}}_{x\to+\infty\ \to 0} + \int_R^{+\infty} \Phi(x,\alpha)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\Phi(R,\alpha)}{R} + \int_R^{+\infty} \frac{\Phi(x,\alpha)}{x^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_R^{+\infty} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leq \frac{|\Phi(R,\alpha)|}{R} + \int_R^{+\infty} \frac{|\Phi(x,\alpha)|}{x^2}\,dx \leq \frac{1}{R} + \int_R^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{R} \quad \forall \alpha \geq 0$$

4) Th. о непр. ИЗП $\Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0+0} I(y) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{\alpha\to 0+0} e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

5) Рассм. $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)dx = \int_0^{+\infty} -x e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx =$

$= \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -\Phi(x,\alpha)\Big|_{x=0}^{+\infty} \overset{\alpha>0}{=\!=} -\left(0 + \frac{1}{\alpha^2+1}\right) = -\frac{1}{\alpha^2+1}$

6) Покажем, что интеграл $\int_0^{+\infty} - e^{-\alpha x}\cdot \sin x\,dx \rightrightarrows$ на $\forall$ мн-ве знач. параметра вида $0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$;

$|e^{-\alpha x}\sin x| \leq e^{-\alpha_0 x}$; $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}dx$ сходится $\underset{\text{пп. Вейерштрасса}}{\Rightarrow} \int_0^{+\infty} - e^{-\alpha x}\sin x\,dx \rightrightarrows \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\forall$ точке мн-ва $\{\alpha \mid 0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty\}$ справедливо рав-во:

$\frac{\partial}{\partial \alpha} I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-\alpha x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)dx = -\frac{1}{\alpha^2+1}$; Т.о. $\forall \alpha > 0\ I'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2+1} \Rightarrow I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C$

В силу непр.-ти $I(\alpha)$ на $[0;+\infty)$, это рав-во верно $\forall \alpha \geq 0$

7) $|I(\alpha)| \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{|\sin x|}{x} dx \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} 0$

$\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha$

8) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim\limits_{\alpha\to 0+0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\alpha\right) = \frac{\pi}{2}$

■

2. Вычисление интеграла Пуассона

▶ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx =: 2I$

1) замена: $x \to t$: $x = ty$, $y > 0$ – произвольный параметр

$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} y\,dt$

2) $\int\limits_0^{+\infty} I e^{-y^2} dy = I \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = I^2$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} y\,dt\right) e^{-y^2} dy = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} y e^{-(1+t^2)y^2} dt\right) dy \overset{(?)}{=}$

$\overset{(?)}{=} \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} y e^{-(1+t^2)y^2} dy\right) dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)y^2} d(y^2)\right) dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$

$I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$; НО: переход (?) необоснован

4) Обоснование перехода (?):

$f(y,t) = y e^{-(1+t^2)y^2} \ge 0$ – непр.

$\int\limits_0^{+\infty} f(y,t)\,dy = \frac{1}{2(1+t^2)}$ – непр. на $[0; +\infty)$

$\int\limits_0^{+\infty} f(y,t)\,dt = I \cdot e^{-y^2}$ – непр.

Th. 14 $\Rightarrow$ (?)

■

§4. Интегралы Эйлера

История:

1729 – 1730: вопрос – $\exists$ ли $f(x)$, $x>0$, т.ч. $f(n)=n!$ $\forall n\in\mathbb{N}$

13.10.1729 (письмо Эйлера Гольдбаху):

$$f(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{k!\,k^{x-1}}{x(x+1)\dots(x+k-1)}\ ;\quad f(n+1)=n!,\ n\in\mathbb{N}$$

1809 (Лежандр): „Гамма-функция"

- Гамма-функция $\Gamma(p):=\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}dx$ (интеграл Эйлера I рода)
- Бета-функция $B(p,q):=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ (интеграл Эйлера II рода)

1° Область определения

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx+\int\limits_1^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}dx$$

$\frac{1}{e}x^{p-1}\le e^{-x}x^{p-1}\le x^{p-1}$; $p-1>-1 \Leftrightarrow p>0 \Rightarrow \int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx$ сх-ся

$p\le 0 \Rightarrow$ расх.-ся

$$e^{-x}x^{p-1}=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\underbrace{\frac{x^{p-1}}{e^{\frac{x}{2}}}}_{\xrightarrow[x\to\infty]{}0}\le Ce^{-\frac{x}{2}}\Rightarrow\int\limits_1^{+\infty}e^{-x}x^{p-1}dx \text{ сх.-ся } \forall p$$

$\exists\,\Gamma(p)$ при $p>0$

$$B(p,q)=\int\limits_0^{\frac12}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int\limits_{\frac12}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$0<C_1x^{p-1}\le x^{p-1}(1-x)^{q-1}\le C_2x^{p-1}$ т.к. $(1-x)^{q-1}$ огр. на $[0;\frac12]$

$\int\limits_0^{\frac12}x^{p-1}dx$ сход. $\Leftrightarrow p>0 \Rightarrow \int\limits_0^{\frac12}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$

аналогично: $\int\limits_{\frac12}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ сход.-ся при $q>0$

$\exists\,B(p,q)$ при $\begin{cases}p>0\\q>0\end{cases}$

2° Гладкость на области определения

а) непр-ть $\Gamma(p)$

Рассм. $0 < p_0 \le p \le p_1 < \infty$ с произвольными константами p_0, p_1

Покажем, что $\Gamma(p)$ сход.-ся равномерно

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}dx \le \int_0^1 1\cdot x^{p_0-1}dx \quad - \text{сх.-ся} \\ \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \le \int_1^\infty e^{-x}x^{p_1-1}dx \quad - \text{сх.-ся}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Gamma(p)$ непр. на $\forall$ мн-ве $[p_0; p_1] \Rightarrow \Gamma(p)$ непр. на $p > 0$

б) дифф-ть $\Gamma(p)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p}(e^{-x}x^{p-1})dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln x \cdot dx$$

$\exists\ 0 < p_0 \le p \le p_1 < \infty$

$$x > 1 \Rightarrow e^{-x}x^{p-1}\ln x \le e^{-x}x^{p_1-1}\ln x = e^{-\frac{x}{2}}\ \frac{x^{p_1-1}\ln x}{e^{\frac{x}{2}}} \le Ce^{-\frac{x}{2}}$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow |e^{-x}x^{p-1}\ln x| = e^{-x}x^{p-1}\ln\frac{1}{x} \le x^{p_0-1}\ln\frac{1}{x} = x^{\frac{p_0}{2}-1}\underbrace{x^{\frac{p_0}{2}}\ln\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0+0]{} 0} \le Cx^{\frac{p_0}{2}-1}$$

интеграл сх. равномерно на $\forall\ [p_0; p_1]$

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}\ln x\,dx \quad \forall p > 0 \Rightarrow \Gamma'(p) \in C(\{p>0\})$$

в) производные след-щих порядков:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial p^k}(e^{-x}x^{p-1})dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^k dx;$$ док-во аналогично далее.

Вывод: $\Gamma(p)$ имеет произв-ные $\forall$ порядка на обл. опред.

3° Значения в нат. точках

$$\exists n \ge 2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx = -\int_0^{+\infty} x^{n-1}de^{-x} = -x^{n-1}e^{-x}\Big|_{x=0}^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x}dx =$$

$$= (n-1)\Gamma(n-1). \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N}\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \\ \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\Gamma(n) = n!}\ , n \in \mathbb{N}$$

$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \quad p>0; \quad B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad p,q>0$

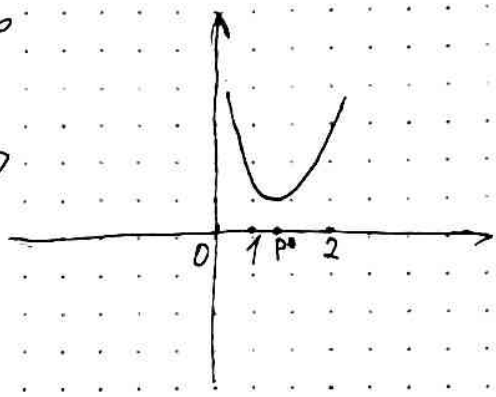
- $\Gamma(p)$ - бесконечно дифф-ма; $\Gamma(1)=1$; $\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$; $\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p)$

$\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} \underbrace{(\ln t)^2 t^{p-1} e^{-t}}_{>0} dt \Rightarrow \Gamma''(p)>0 \Rightarrow \Gamma(p)$ выпукла вниз

и $\Gamma'(p)\nearrow$ на $\{p>0\}$

$\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2) \Rightarrow \exists!\, p^* \in (1,2)$ т.ч. $\Gamma(p^*) = \min\limits_{1\le p\le 2}\Gamma(p)$

$\Gamma(p)$ вып. вниз $\Rightarrow \underset{(p>2)}{\Gamma(p)\nearrow} \Rightarrow \lim\limits_{p\to+\infty}\Gamma(p) = +\infty$



- $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{\Gamma(p)}{p} = \lim\limits_{p\to+\infty}\frac{\Gamma(p+1)}{p+1} = \lim\limits_{p\to+\infty}\frac{p}{p+1}\Gamma(p) = +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ накл. асимптот нет при $p\to+\infty$

4°. Ф-лы для $B(p,q)$

▸ а) $B(p,q) = B(q,p)$

$\rfloor$ $B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \{u=1-t\} = -\int\limits_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}du = B(q,p)$

■

- ▸ б) ф-лы приведения

$\rfloor$ $B(p+1,q) = \int\limits_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt = \{d(1-t)^q = -q(1-t)^{q-1}dt\} = -\frac{1}{q}\int\limits_0^1 t^p d(1-t)^q =$

$= -\frac{1}{q}t^p(1-t)^q\Big|_{t=0}^1 + \frac{1}{q}\int\limits_0^1(1-t)^q\cdot p\cdot t^{p-1}dt = \frac{p}{q}\int\limits_0^1(1-t)(1-t)^{q-1}\cdot t^{p-1}dt =$

$= \frac{p}{q}\int\limits_0^1(1-t)^{q-1}t^{p-1}dt - \frac{p}{q}\int\limits_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt$

Получаем: $B(p+1,q)\left(1+\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{p}{q}B(p,q)$

- $B(p+1,q) = B(p,q)\cdot\frac{p}{p+q}$; $\quad B(p,q+1) = B(p,q)\cdot\frac{q}{p+q}$

■

5°. Связь между интегралами Эйлера

▸ $$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \forall p,q>0$$

] $I(D) := \iint\limits_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid x>0,\ y>0\}$

$I(D)$ – несобств. интеграл по неогр. области; подынтегр. ф-ция $f(x,y) := x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y}$ может иметь особенность при $x=0$ или $y=0$

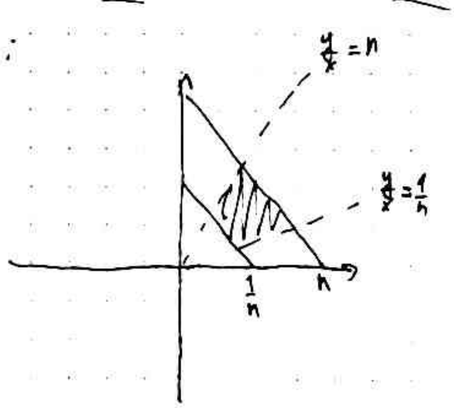
$f(x,y)>0 \Rightarrow I(D)$ сх.-ся iff $\exists \lim\limits_{n\to\infty} I(D_n)$ хотя бы для одной посл.-ти $\{D_n\}$, монот. исчерпывающей D

$$D_n := \left\{(x,y) \mid \tfrac1n < x < n;\ \tfrac1n < y < n\right\}$$

$$I(D_n) = \iint\limits_{D_n} x^{p-1}y^{q-1}e^{-x}e^{-y}\,dx\,dy = \underbrace{\int_{1/n}^{n} x^{p-1}e^{-x}dx}_{\xrightarrow{n\to\infty}\Gamma(p)} \ \underbrace{\int_{1/n}^{n} y^{q-1}e^{-y}dy}_{\xrightarrow{n\to\infty}\Gamma(q)} \xrightarrow{n\to\infty} \Gamma(p)\Gamma(q) = I(D)$$

Рассмотрим $\{D_n'\} \subset D$ („моном. исчерп. D"):

$$D_n' = \left\{(x,y) \mid \tfrac1n \le x+y \le n;\ \tfrac1n \le \tfrac{y}{x} \le n\right\}$$



D_n' моном. исчерп. D т.к. $\begin{cases} D_n \subset D_{n+1} \\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D \end{cases}$

$$I(D_n') \xrightarrow{n\to\infty} I(D)$$

$$\iint\limits_{D_n'} x^{p-1}y^{q-1}e^{-x-y}\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix} u = x+y; & y = uv \\ v = \frac{y}{x+y}; & x = u(1-v)\end{matrix}\right. \qquad dx\,dy = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| du\,dv = \left|\begin{matrix} 1-v & -u \\ v & u \end{matrix}\right| du\,dv = u\,du\,dv$$

$$= \iint u^{p-1}(1-v)^{p-1}u^{q-1}v^{q-1}e^{-u}\cdot u\,du\,dv = \left\{\begin{matrix} \frac1n \le u \le n;\ \frac{y}{x} = \frac{v}{1-v} = -1+\frac{1}{1-v}; \\ \frac{y}{x} = \frac1n \Rightarrow \frac{1}{1-v} = \frac1n + 1;\ v = \frac{1}{1+n};\ \frac{y}{x} = n \Rightarrow v = \frac{n}{n+1}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \underbrace{\int_{1/n}^{n} u^{p+q-1}e^{-u}du}_{\xrightarrow{n\to\infty}\Gamma(p+q)} \ \underbrace{\int_{\frac{1}{1+n}}^{\frac{n}{1+n}} (1-v)^{p-1}v^{q-1}dv}_{\xrightarrow{n\to+\infty} B(q,p) = B(p,q)};$$

$$I(D) = \Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q) \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Следствия.

1) $B(p,q)$ непр. на $\{p>0, q>0\}$

2) $B(p,q)$ имеет любые производные любого порядка в $\{p>0, q>0\}$

Ex. 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}\varphi \cos^{q-1}\varphi \, d\varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}\,; & \cos\varphi = (1-x)^{\frac{1}{2}}; \\ x = \sin^2\varphi \Rightarrow \sin\varphi = x^{\frac{1}{2}}; & dx = 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 2x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}d\varphi \end{array} \right\} =$

$= \int_0^1 x^{\frac{p-1}{2}} (1-x)^{\frac{q-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1} (1-x)^{\frac{q}{2}-1} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$

Ex. 2 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x} d(\sqrt{x}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{\text{Пуассона}}{\overset{}{=\!=\!=}}_{\text{инт.}} \sqrt{\pi}$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

§5. Формула Стирлинга

$\underset{\alpha>0}{\ln^\alpha n} \ll \underset{\beta>0}{n^\beta} \ll \underset{\delta>0}{e^{\delta n}}$; $\quad e^{\delta n} \ll n^n$; $\quad e^{\delta n} \ll n!$; $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$

James Stirling (1692 - 1770): $\quad n! \sim C n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Moivre, Abraham (1667 - 1754): $\quad C = \sqrt{2\pi}$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + \bar{o}(1))$$

$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$; рассмотрим интеграл ~~для~~ $\forall n>0$:

$\forall\lambda>0 \quad \Gamma(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-t} dt \underset{}{\overset{t=\lambda(x+1)}{=\!=\!=}} \int_{-1}^{+\infty} \lambda^\lambda (x+1)^\lambda e^{-\lambda(x+1)} \lambda \, dx =$

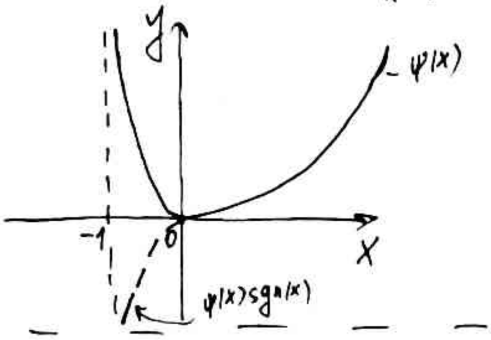
$= \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{+\infty} (x+1)^\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{+\infty} e^{-\lambda(x - \ln(x+1))} dx$

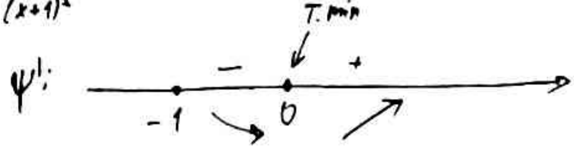
$\Gamma(\lambda+1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{\lambda}dt; \qquad \exists\; t=\lambda(x+1) \qquad \Rightarrow \quad \Gamma(\lambda+1)=\lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-\lambda(x-\ln(x+1))}dx$

▶ Как себя ведет $\Gamma(\lambda)$ при $\lambda\to+\infty$?

Возможна ли замена $y=\sqrt{x-\ln(x+1)}$?

$\psi(x):=x-\ln(x+1)$; $\psi'=\frac{x}{x+1}$, $x>-1$; $\psi''=\frac{1}{(x+1)^2}>0$





ф-ция не явл. монотонной на обл. опр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ замена не подходит

Возможна ли замена $y=\mathrm{sgn}(x)\cdot\sqrt{x-\ln(x+1)}$?

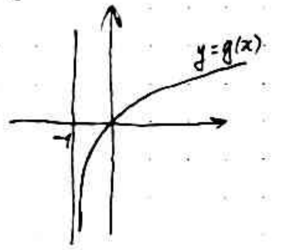
$x\to0 \Rightarrow x-\ln(x+1)=x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\right)=x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\dots\right)$;

$h(x):=\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\dots$; $\qquad \sqrt{x-\ln(x+1)}=\sqrt{x^2h(x)}\underset{h(x)>0}{=}|x|\sqrt{h(x)}$

$h(0)=\frac{1}{2}\neq0 \Rightarrow$ предполагаемая замена $y=\mathrm{sgn}(x)|x|\sqrt{h(x)}\equiv x\sqrt{h(x)}$

– корректна

I $\;g(x)\equiv x\sqrt{h(x)}$ монот. возр., бесконечно дифф-ма на $(-1;+\infty)$

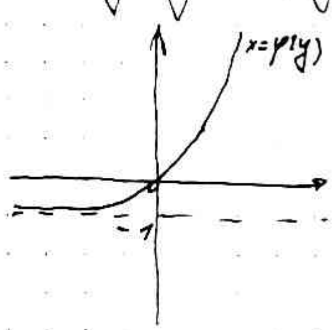


$y=x\sqrt{h(x)}=x\sqrt{\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}}$

для функции $g(x)$ $\exists$ обратная $x=g^{-1}(y):=\varphi(y)$

$\varphi(y)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$dx=\varphi'(y)dy$



$g'(x)=\dfrac{2h(x)+xh'(x)}{2\sqrt{h(x)}}$

$g''(x)=\dots=\dfrac{h'(x)h(x)+xh''(x)h(x)-xh'^2(x)}{4h(x)\sqrt{h(x)}}=\dots$

(проверка выпуклости не имеет значения, важно возрастание.)

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-\lambda(x-\ln(x+1))}dx \ominus \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy}_{=:I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy}_{=:I_2} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy}_{=:I_3}$$

Докажем, что I_2 и I_3 убывают экспоненциально при $\lambda\to+\infty$

$$I_2 = \{x=\varphi(y)\} = \int_{-1}^{\varphi(-1)} e^{-\lambda g^2(x)}dx \le \int_{-1}^{\varphi(-1)} e^{-\lambda}dx \le e^{-\lambda}$$

$$I_3 = \{x=\varphi(y)\} = \int_{\varphi(1)}^{+\infty} e^{-\lambda g^2(x)}dx = \int_{\varphi(1)}^{+\infty} e^{-(\lambda-1)g^2(x)}\cdot e^{-g^2(x)}dx \underset{\lambda\ge 1}{\le}$$

$$\underset{\lambda\ge 1}{\le} e^{-(\lambda-1)}\int_{\varphi(1)}^{+\infty} e^{-g^2(x)}dx = e^{(-\lambda-1)}\int_{\varphi(1)}^{+\infty} e^{-(x-\ln(x+1))}dx$$ $\to$ сходится

$I_2 = \underline{O}(e^{-\lambda})$; $I_3 = \underline{O}(e^{-\lambda})$, $\lambda\to+\infty$; поведение I_1 - ??? ■

▶ Лемма $\exists f(y)$ инт.-ма на $[-a;a]$ и $f(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots + c_{2n-1}y^{2n-1} + \underline{O}(y^{2n})$

$\top$ $$\int_{-a}^{a} e^{-\lambda y^2} f(y)\,dy = c_0\frac{\Gamma(\frac12)}{\lambda^{\frac12}} + c_2\frac{\Gamma(\frac32)}{\lambda^{\frac32}} + \ldots\ c_{2n-2}\frac{\Gamma(n-\frac12)}{\lambda^{n-\frac12}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right),\quad \lambda\to+\infty$$

$\rfloor$ $$\int_{-a}^{a} e^{-\lambda y^2}\left(c_0 + c_1 y + \ldots + c_{2n-1}y^{2n-1} + \underline{O}(y^{2n})\right)dy =$$

$$= c_0\int_{-a}^{a} e^{-\lambda y^2}dy + c_2\int_{-a}^{a} e^{-\lambda y^2}y^2\,dy + \ldots + c_{2n-2}\int_{-a}^{a} e^{-\lambda y^2}y^{2n-2}dy + \underline{O}(1)\int_{-a}^{a} e^{-\lambda y^2}y^{2n}dy \ominus$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\int_{-a}^{a} e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy - \int_{|y|\ge a} e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy$$

$$2\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy = \left\{\begin{matrix}\xi=\lambda y^2;\ y=\sqrt{\frac{\xi}{\lambda}};\\ d\xi = 2\lambda y\,dy;\ dy = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi\lambda}}\end{matrix}\right\} = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\xi}\frac{\xi^k}{\lambda^k}\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^{k+\frac12}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\xi}\xi^{k-\frac12}d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(k+\frac12)}{\lambda^{k+\frac12}}$$

$$\int_{|y|\ge a} e^{-\lambda y^2}y^{2k}dy \le e^{-(\lambda-1)a^2}\int_{|y|\ge a} e^{-y}y^{2k}dy = \underline{O}(e^{-\lambda a^2})$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$= c_0\left[\frac{\Gamma(\frac12)}{\lambda^{\frac12}} + \underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right] + c_2\left[\frac{\Gamma(\frac32)}{\lambda^{\frac32}} + \underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right] + \ldots + c_{2n-2}\left[\frac{\Gamma(n-\frac12)}{\lambda^{n-\frac12}} + \underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right] +$$

$$+ \underline{O}(1)\left[\frac{\Gamma(n+\frac12)}{\lambda^{n+\frac12}} + \underline{O}(e^{-\lambda a^2})\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(c_{2k-2}\frac{\Gamma(k-\frac12)}{\lambda^{k-\frac12}}\right) + \underline{O}(e^{-\lambda a^2}) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(c_{2k-2}\frac{\Gamma(k-\frac12)}{\lambda^{k-\frac12}}\right) + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{n+\frac12}}\right)$$ ■

$$I_1 = \int_{-1}^{1} e^{-\lambda y^2} \varphi'(y)\,dy \;;\quad \varphi'(y) = \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{1!} y + \frac{\varphi'''(0)}{2!} y^2 + \frac{\varphi^{(4)}(0)}{3!} y^3 + \underline{O}(y^4)$$

$$g^2(x) = x - \ln(x+1)\;;\quad y = g(x)$$

$$2g(x)\,g'(x) = \frac{x}{x+1}\;;\quad 2y\,g'(x) = \frac{\varphi(y)}{\varphi(y)+1}\;;\quad \varphi'(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{2y(\varphi(y)+1)}{\varphi(y)}$$

$$\varphi(y)\,\varphi'(y) = 2y\,\varphi(y) + 2y$$

$$\varphi'(y)\,\varphi'(y) + \varphi(y)\,\varphi''(y) = 2\varphi(y) + 2y\,\varphi'(y) + 2$$

$$y = 0 \Rightarrow (\varphi'(0))^2 = 2 \Rightarrow \underbrace{\varphi'(0) = \sqrt{2}}$$

$$\varphi''(y)\varphi'(y) + \varphi'(y)\varphi''(y) + \varphi'(y)\varphi''(y) + \varphi(y)\varphi^{(3)}(y) =$$

$$= 2\varphi'(y) + 2\varphi'(y) + 2y\,\varphi''(y)$$

$$3\varphi'(y)\varphi''(y) + \varphi(y)\varphi'''(y) = 4\varphi'(y) + 2y\,\varphi''(y)$$

$$3\varphi''(0)\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \underbrace{\varphi''(0) = \frac{4}{3}}$$

$$4\varphi'''(y)\varphi'(y) + 3(\varphi''(y))^2 + \varphi(y)\varphi^{(4)}(y) = 6\varphi''(y) + 2y\,\varphi'''(y)$$

$$y = 0 \Rightarrow \quad 4\varphi'''(0)\sqrt{2} + 3\cdot\frac{16}{9} + 0 = 6\cdot\frac{4}{3} + 0$$

$$\varphi'''(0) = \frac{8 - \frac{16}{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\varphi'(y) = \sqrt{2} + \frac{4}{3}y + \frac{\sqrt{2}}{6}y^2 + \frac{\varphi^{(4)}(0)}{3!}y^3 + \underline{O}(y^4)$$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} e^{-\lambda y^2}\varphi'(y)\,dy = \sqrt{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right) =$$

$$= \left\{ \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\;;\ \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\;; \right\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{12\lambda\sqrt{\lambda}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1}e^{-\lambda}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{12\lambda\sqrt{\lambda}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}\right) + \underline{O}(e^{-\lambda})\right] =$$

$$= \lambda^{\lambda+\frac{1}{2}}e^{-\lambda}\sqrt{2\pi}\left[1 + \frac{\frac{1}{12}}{\lambda} + \underline{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right] = \lambda^{\lambda+\frac{1}{2}}e^{-\lambda}\sqrt{2\pi}\left[1 + \bar{o}(1)\right]$$

$$\lambda = n \Rightarrow n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,\left(1 + \bar{o}(1)\right)$$

∎